Chapter 8

ディジタル制御

これまで述べてきた設計法は、微分方程式で記述された状態空間モデル ($\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Cx$) に対するものであった。得られる制御器も、一般に状態空間モデルと同様の構造をもつ。これをアナログ電子回路を利用して実現することも可能であるかもしれないが、制御器の次数が増えるに伴い大変な作業となるだけではなく、ちょっとした設計変更に対する対応も容易なことではなくなる。そのため、通常、制御器の実装はディジタル計算機を利用して行われる。本章では、このことについて述べる。

8.1 離散時間モデルとその性質

8.1.1 離散時間モデル

状態方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{8.1}$$

の解が

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

で与えられることは 2 章で述べた。この方程式は操作量 $u(t)$ の下で初期状態 $x(0)$ と時刻 t における状態量 $x(t)$ の関係を表している。これを利用すると、時刻 $t = k\Delta$ と $(k+1)\Delta$ における状態量 $x(t)$ の関係を得ることができる。

$$x[k+1] = e^{A\Delta}x[k] + \int_t^{t+\Delta} e^{A(t+\Delta-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{8.2}$$

ここで、Δ は **サンプリング時間** (sampling time) を表す一定値であり、$x[k] = x(k\Delta)$ という表記法を使用している。もし $u(\tau)$ が時刻 t から $t+\Delta$ 期間中一定 ($u[k]$) であると仮定すると、

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k] \tag{8.3}$$

という **差分方程式** (difference equation) に書き換えられる。ここで、

$$A_d = e^{A\Delta}, \quad B_d = \int_0^{\Delta} e^{A\tau} d\tau \ B$$

である。観測方程式 ($y = Cx$) は状態量と観測量との代数関係を表すものであるので、時刻 $t = k\Delta$ における関係は

$$y[k] = Cx[k] \tag{8.4}$$

で与えられる。

このように状態空間モデルを差分方程式に書き換える操作のことを **離散化** (discretization) と呼び、得られた方程式 (8.3), (8.4) を **離散時間モデル** (discrete-time model) と呼ぶ。特に、式 (8.3) を **離散時間状態方程式** (descrete-time state space model) と呼ぶ。これに対応して、もとの状態空間モデルのことを **連続時間モデル** (continuous-time model) と呼ぶ。

例題 8.1

磁気浮上系に対する離散時間方程式を求めてみる。式 (2.4) の状態遷移行列より

$$A_d = e^{A\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{\sqrt{\alpha}\Delta} + e^{-\sqrt{\alpha}\Delta}) & \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(e^{\sqrt{\alpha}\Delta} - e^{-\sqrt{\alpha}\Delta}) \\ \frac{\sqrt{\alpha}}{2}(e^{\sqrt{\alpha}\Delta} - e^{-\sqrt{\alpha}\Delta}) & \frac{1}{2}(e^{\sqrt{\alpha}\Delta} + e^{-\sqrt{\alpha}\Delta}) \end{bmatrix}$$

$$b_d = \frac{\beta}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}(e^{\sqrt{\alpha}\Delta} + e^{-\sqrt{\alpha}\Delta}) - \frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(e^{\sqrt{\alpha}\Delta} - e^{-\sqrt{\alpha}\Delta}) \end{bmatrix}$$

を得る。いま $\Delta = 1[msec]$ とすると、

$$A_d = \begin{bmatrix} 1.0012 & 1.004 \times 10^{-3} \\ 2.485 & 1.0012 \end{bmatrix}, \quad b_d = \begin{bmatrix} -5.778 \times 10^{-6} \\ -1.156 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

となる。

以下では、このように与えられた離散時間モデル (8.3) のもつ性質を簡単に述べる。

8.1.2 離散時間状態方程式の解

最初に離散時間状態方程式の解を求めてみよう。式 (8.3) より、

$$\begin{aligned} x[1] &= A_d x[0] + B_d u[0] \\ x[2] &= A_d x[1] + B_d u[1] = A_d^2 x[0] + A_d B_d u[0] + B_d u[1] \\ &\vdots \end{aligned}$$

であることから、その解 $x[n]$ は次式で与えられる。

$$x[n] = A_d^n x[0] + \sum_{i=0}^{n-1} A_d^{n-i-1} B_d u[i] \tag{8.5}$$

8.1.3 安定性

離散時間モデルの漸近安定性を議論するために、連続時間モデルのときと同様に $u[k] = 0\ (k = 0, 1, \cdots)$ としたときの解

$$x[n] = A_d^n x[0] \tag{8.6}$$

を考える。簡単のために、行列 A_d の固有値 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ がすべて相異なると仮定すると、これらの固有値に対応した固有ベクトルからなる行列 T を利用して A_d を対角行列に正則変換することができる。いま、$x[i] = Tz[i]$ とすると、

$$\begin{aligned} z[n] &= T^{-1} A_d^n T z[0] = (T^{-1} A_d T)^n z[0] \\ &= diag\{\lambda_1^n, \cdots, \lambda_n^n\} z[0] \end{aligned}$$

これより、任意の初期状態 $z[0]$ に対して $\lim_{n\to\infty} z[n] = 0$ が成り立つためには、

$$|\lambda_i| < 1; \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{8.7}$$

でなければならない。行列 T が正則であり、$\lim_{n\to\infty} z[n] = 0$ が $\lim_{n\to\infty} x[n] = 0$ を意味することから、式 (8.6) が漸近安定であるための必要十分条件が式 (8.7) であることがいえる。連続時間モデルにおいては、極の実部がすべて負であることが漸近安定であるための必要十分条件であったが、離散時間モデルに対しては、極の絶対値が 1 未満、言い替えると、原点を中心とする単位円内にすべての極が存在することが漸近安定であるための条件であることがわかる。

ところで、行列 A の固有値 λ に対する固有ベクトルを v とすると、$A_d = e^{A\Delta}$ であることから

$$\begin{aligned} A_d v &= e^{A\Delta} v = (I + A\Delta + \frac{(A\Delta)^2}{2!} + \cdots) v \\ &= (1 + \lambda\Delta + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots) v \\ &= e^{\lambda\Delta} v \end{aligned} \tag{8.8}$$

の関係を得る。これより、両者の固有ベクトルは等しく、行列 A_d の固有値は $e^{\lambda\Delta}$ で与えられることがわかり、次の定理が成り立つことを示すことができる。

定理 8.1

連続時間モデルが漸近安定である $(Re(\lambda) < 0)$ ならば、それに対する離散時間モデルも漸近安定である $(|e^{\lambda\Delta}| < 1)$。

なお、次式の関係にある連続時間モデルの極

$$\lambda_1 = \sigma + j\omega, \quad \lambda_i = \sigma + j(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta}) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{8.9}$$

は離散時間モデルにおいては同じ位置に写像される。

例題 8.2

例題 8.1 で得られた行列 A_d に対して極を計算すると $1.0511,\ 0.9514$ を得る。これらは、連続時間系の極が ± 49.84 にあることから、$e^{49.84\times 0.001} = 1.0511, \quad e^{-49.84\times 0.001} = 0.9514$ より得ることもできる。この結果より、行列 A_d は原点を中心とする単位円外に 1 つの極を持つので、この系は不安定であることがわかる。

8.1.4 可到達性と可制御性

離散時間状態方程式 (8.3) に対して、可到達性を次のように定義する。

定義 8.1

原点 $x[0] = 0$ にある状態量を有限時刻で任意の状態 $x[l] = x_s$ に移動させる操作量 $u[k];\ k = 0, 1, \cdots, l-1$ が存在するとき、離散時間状態方程式が可到達であるという。

$x[0] = 0$ として式 (8.5) を少し変形すると、

$$x[n] = [B_d\ A_dB_d\ \cdots\ A_d^{n-1}B_d] \begin{bmatrix} u[n-1] \\ u[n-2] \\ \vdots \\ u[0] \end{bmatrix}$$

となる。したがって、

$$rank([B_d\ A_dB_d\ \cdots\ A_d^{n-1}B_d]) = n \tag{8.10}$$

であれば、有限時間 $k = n$ で原点を $x[n] = x_s$ に移動させることが可能である。逆に、上式が成り立たない、すなわち左辺がフル行ランクをもたないならば、移動させることのできない状態が存在する。以上より、次の定理が成り立つ。

定理 8. 2

離散時間状態方程式 (8.3) が可到達であるための必要十分条件は、式 (8.10) が成り立つことである。

次に可制御性を定義しよう。

定義 8. 2

任意の初期状態 $x[0]$ に対して有限時刻で $x[l]=0$ とする操作量 $u[k];\ k=0,1,\cdots,l-1$ が存在するとき、離散時間状態方程式が可制御であるという。

連続時間状態方程式においては、可制御性と可到達性は等価であるが、離散時間状態方程式の場合には一般にはそうではない。たとえば $A_d=0$ の場合、到達可能な状態は行列 B_d の列ベクトルによって生成される空間である ($x[k+1]=B_d u[k]$ であるため)。したがって、$rank(B_d)=n$ でない限り可到達ではないが、可制御であることは明らかである。一般に、$det(A_d)=0$ (A_d が 0 固有値をもつ) のとき、可制御性と可到達性は等価ではなく、可到達性の方がきびしい条件となる。

しかし、式 (8.3) が式 (8.1) を離散化したことによって得られたものであるならば、状態遷移行列が正則であることより、可制御性と可到達性は等価な条件となる。

ところで、式 (8.10) の条件は連続時間状態方程式の可制御性の条件と等価であり、定理 3.1 と同様に、次の定理を示すことができる。

定理 8. 3

以下に示すことは等価である。

(1) 対 (A_d, B_d) は可制御である。

(2) 式 (8.10) が成り立つ。

(3) 任意の $z \in \mathbf{C}$ に対して $rank([zI_n - A_d \quad B_d]) = n$

(4) $A_d - B_d K_d$ が任意の固有値をもつように K_d を選定することができる

最後の条件は離散時間状態方程式 (8.3) に対して $u[k]=-K_d x[k]$ という状態フィードバック制御により、任意に極配置が可能であることを意味している。フィードバックゲイン K_d の設計には、3 章で述べた方法をそのまま利用することが可能である。ただし、指定する極の位置は原点を中心とする単位円内であることに注意してほしい。

連続時間状態方程式 (8.1) の可制御性とそれを離散化した離散時間状態方程式 (8.3) の可制御性について次の定理が成り立つ。

定理 8. 4

連続時間状態方程式 (8.1) が可制御であり、行列 A が式 (8.9) の関係にある固有値をもたなければ、それに対する離散時間状態方程式 (8.3) も可制御である。

この定理は、連続時間状態方程式が可制御であれば、それに対する離散時間状態方程式もほとんどすべてのサンプリング時間 Δ に対して可制御であることを意味している。

例題 8.3

例題 8.1 で求めた系に対して可制御行列の行列式を計算すると

$$det([b_d \ A_d b_d]) = -1.3357 \times 10^{-7}$$

であるので、可制御であることがわかる。また、$det(A_d) \neq 0$ なので、可到達でもある。次に、極配置法を用いて状態フィードバックゲイン k_d を求める。離散時間系の場合、指定する極の位置は原点を中心とする単位円内でなければならないので、ここでは $\lambda_1 = 0.8,\ \lambda_2 = 0.9$ としよう。このときのフィードバックゲインは

$$k_d = [-5.407 \times 10^3 \quad -40.77]$$

で与えられる。

ところで、閉ループ極を 0(2 重根) に選んだとする。たとえば、磁気浮上系に対しては

$$k_d = [-8.6422 \times 10^4 \quad -130.02]$$

とすればよい。このとき、閉ループ系の行列を $A_{cd} = A_d - b_d k_d$ とすると、

$$A_{cd}^2 = 0$$

が成り立つ。このことは状態フィードバックによる閉ループ系の初期値応答が有限時刻で 0 となることを意味する。これを **有限時間整定制御** (finite time settling control) と呼び、連続時間制御にはない特長である。ただし、フィードバックゲインからもわかるように、非常に大きな操作量が必要となることに注意が必要である。

8.1.5 可観測性と状態観測器

可観測性は、連続時間モデルの場合と同様に、有限時刻内の観測量から初期状態を唯一に決定できるかどうかという性質であり、対象とするものは

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A_d x[k] \\ y[k] &= C x[k] \end{aligned}$$

である。上式より、次に示す等式を容易に導くことができる。

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA_d \\ \vdots \\ CA_d^{n-1} \end{bmatrix} x[0]$$

したがって、連続時間モデルのときと同様に

$$rank([C^T \ A_d^T C^T \ \cdots (A_d^{n-1})^T C^T]) = n \tag{8.11}$$

が可観測であるための必要十分条件であることがわかる。

可制御性との双対性より、離散時間モデルが可観測であれば $A_d - H_d C$ の固有値を任意に指定できる行列 H_d が存在することを示すことができる。

離散時間モデルが可観測であれば、$A_d - H_d C$ が漸近安定となる (その固有値がすべて原点を中心とする単位円内にある) ようにオブザーバゲイン H_d を選定したとすると、

$$\hat{x}[k+1] = A_d \hat{x}[k] + B_d u[k] + H_d (y[k] - C\hat{x}[k]) \tag{8.12}$$

は、誤差 $e[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ は時間の経過とともに 0 に向かうという意味で全状態観測器であることがいえる。

8.2 離散時間制御器の設計

一般に制御対象に対するモデルは、連続時間モデル

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{8.13}$$

として与えられる。それに対して、ディジタル計算機に実装する制御器は離散時間モデル

$$\begin{aligned} z[k+1] &= A_{dk} z[k] + B_{dk} y[k] \\ u[k] &= C_{dk} z[k] + D_{dk} y[k] \end{aligned} \tag{8.14}$$

として与えなければならない。そのため、式 (8.14) を得る設計法は 2 つに大別して考えることができる。

一つは、連続時間モデルに対して離散時間モデルを構成し、それに対して離散時間制御器を設計する方法である。通常、制御対象の現在の情報は A/D変換器を通してディジタル計算機に取り込まれ、必要な演算を行った後、D/A 変換器を通して制御対象に与えるといった構成となる。取り込みから出力まである有限な時間が必要なので、D/A 変換器の出力は新しい操作量が決定されるまで (サンプリング期間中) 一定値にホールド (0 次ホールド) されるのが通常である。このことから、離散時間モデルは、式 (8.3) を導出した手順をそのまま利用すればよい。これに対して設計される制御器は、差分方程式の形をしているために、そのまま計算機上へ実装することが可能である。

離散時間モデルに対する制御器の設計法については、その概略を前節で示したが、さらに詳細については多くの良書が市販されているので、それらを参考にしてほしい。

もう一つの方法は、連続時間モデルに対して連続時間制御器を設計した後、それを離散時間制御器に変換 (近似) する方法である。近似方法によっていくつかの方法が提案されて

いる。このことについて以下検討しよう。すなわち、前章までの設計理論に基づいて得られた制御器

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_k z + B_k y \\ u &= C_k z \end{aligned} \tag{8.15}$$

から式 (8.14) を得る方法について検討する。

8.2.1 前進差分

時間関数 $v(t)$ を (不定) 積分したものを $z(t)$ とする。すなわち、

$$z(t) = \int v(t)\, dt \tag{8.16}$$

この積分を近似するもっとも単純な方法は、

$$z[k+1] = z[k] + \Delta v[k]$$

である。ここで、Δ は時間の刻みで $z[k] = z(k\Delta)$ である。この近似法は、時刻 $[k\Delta, (k{+}1)\Delta]$ 中における $v(t)$ の変化が小さいことを前提としたものである。この手法は、微分を

$$\dot{z} \to \frac{z[k+1] - z[k]}{\Delta}$$

と近似したことに相当する。

これを連続時間制御器 (8.15) に適用すると簡単な式変形から次式が得られる。

$$\begin{aligned} z[k+1] &= (I + A_k\Delta) z[k] + \Delta B_k y[k] \\ u[k] &= C_k z[k] \end{aligned} \tag{8.17}$$

これを **前進差分** (forward difference) による離散化と呼ぶ。

8.2.2 後退差分

前進差分に対して **後退差分** (backward difference) による離散化がある。これは、微分を

$$\dot{z} \to \frac{z[k] - z[k-1]}{\Delta}$$

と近似するものである。これを連続時間制御器 (8.15) に適用すると、

$$(I - A_k\Delta) z[k+1] = z[k] + B_k \Delta y[k+1]$$

上式を $\hat{z}[k] := (I - A_k\Delta) z[k] - B_k\Delta y[k]$ と定義した $\hat{z}[k]$ を利用して書き換えると、次に示す結果が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{z}[k+1] &= A_{db}\hat{z}[k] + B_{db}y[k] \\ u[k] &= C_{db}\hat{z}[k] + D_{db}y[k] \end{aligned} \tag{8.18}$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_{db} &= (I - A_k\Delta)^{-1} \\ B_{db} &= (I - A_k\Delta)^{-1}B_k\Delta \\ C_{db} &= C_k(I - A_k\Delta)^{-1} \\ D_{db} &= C_k(I - A_k\Delta)^{-1}B_k\Delta \end{aligned}$$

これが後退差分による離散化である。

8.2.3 0次ホールド

この方法は、サンプリング時間中入力が変化しない(あるいはその変化が微小)と仮定するもので、連続時間モデルを離散化した手法をそのまま利用することができる。その結果、

$$\begin{aligned} z[k+1] &= A_{dz}z[k] + B_{dz}y[k] \\ u[k] &= C_{dz}z[k] \end{aligned} \tag{8.19}$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_{dz} &= e^{A_k\Delta} \\ B_{dz} &= \int_0^{\Delta} e^{A_k\tau}\ d\tau B_k \\ C_{dz} &= C_k \end{aligned}$$

を得る。もし、行列 A_k が正則、すなわち原点に固有値をもたないならば、状態遷移行列の定義より

$$\int_0^{\Delta} e^{A_k\tau}\ d\tau = A_k^{-1}(e^{A_k\Delta} - I)$$

の関係が成り立つ。これを利用すると

$$\begin{aligned} A_{dz} &= e^{A_k\Delta} \\ B_{dz} &= A_k^{-1}(e^{A_k\Delta} - I)B_k \\ C_{dz} &= C_k \end{aligned}$$

を得る。

8.2.4 双一次変換

より精度の高い数値積分法として台形公式がある。この公式は、時刻 $k, k+1$ における z, v をそれぞれ $z[k], z[k+1], v[k], v[k+1]$ としたとき、

$$z[k+1] = z[k] + \frac{\Delta}{2}(v[k+1] + v[k])$$

で与えられる。これに対して、時間進み演算子 q $(u[k+1] = qu[k])$ を利用して $z[k]/v[k]$ の関係を求めると、

$$\frac{z[k]}{v[k]} = \frac{\Delta}{2}\frac{q+1}{q-1} \tag{8.20}$$

が得られる。ところで、式(8.16) に対してラプラス変換を利用して $z(s)/v(s)$ の関係を求めると、

$$\frac{z(s)}{v(s)} = \frac{1}{s} \tag{8.21}$$

であるので、式(8.20) と (8.21) を比較すると、微分 (ラプラス変換でいうところの s) は形式的に

$$s \to \frac{2}{\Delta}\frac{q-1}{q+1} \tag{8.22}$$

で置き換えられることがわかる。

以上の関係式を利用して、式(8.15) を離散化しよう。式(8.22) より、

$$\frac{2}{\Delta}\frac{q-1}{q+1}z[k] = A_k z[k] + B_k y[k]$$

が得られるが、これを変形すると

$$(I - \frac{\Delta}{2}A_k)z[k+1] - \frac{\Delta}{2}B_k y[k+1] = (I + \frac{\Delta}{2}A_k)z[k] + \frac{\Delta}{2}B_k y[k]$$

上式に対して、$\hat{z}[k] := (I - \frac{\Delta}{2}A_k)z[k] - \frac{\Delta}{2}B_k y[k]$ と定義した $\hat{z}[k]$ を利用すると、途中式変形は省略するが

$$\begin{aligned} \hat{z}[k+1] &= A_{dt}\hat{z}[k] + B_{dt}y[k] \\ u[k] &= C_{dt}\hat{z}[k] + D_{dt}y[k] \end{aligned} \tag{8.23}$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_{dt} &= (I + \frac{\Delta}{2}A_k)(I - \frac{\Delta}{2}A_k)^{-1} \\ B_{dt} &= \Delta P B_k \\ C_{dt} &= C_k P \\ D_{dt} &= C_k P \frac{\Delta}{2} B_k \\ P &= (I - \frac{\Delta}{2}A_k)^{-1} \end{aligned}$$

が得られる。これが双一次変換による離散化である。e^x に対する 1 次の Padé 近似は

$$e^x = \frac{1+x/2}{1-x/2}$$

で与えられるが、双一次変換により得られた A_d はこれに対応していることがわかる。

8.2.5 まとめ

これまで述べてきた離散化の手法をまとめると下表が得られる。

	A_d	B_d	C_d	D_d
前進差分	$I + A_k\Delta$	ΔB_k	C_k	0
後退差分	Q	$\Delta Q B_k$	$C_k Q$	$C_k Q B_k \Delta$
0 次ホールド	$e^{A_k\Delta}$	$A_k^{-1}(e^{A_k\Delta} - I)B_k$	C_k	0
双一次	$(I + A_k\Delta/2)P$	$\Delta P B_k$	$C_k P$	$C_k P B_k \Delta/2$

ここで、

$$\begin{aligned} P &= (I - \frac{\Delta}{2}A_k)^{-1} \\ Q &= (I - A_k\Delta)^{-1} \end{aligned}$$

次に各手法間の関係を調べてみよう。状態遷移行列の定義

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

と、

$$\begin{aligned} Q = (I - A_k\Delta)^{-1} &= I + A_k\Delta + (A_k\Delta)^2 + (A_k\Delta)^3 + \cdots \\ (I + A_k\Delta/2)P &= I + A_k\Delta + \frac{(A_k\Delta)^2}{2} + \frac{(A_k\Delta)^3}{8} + \cdots \end{aligned} \tag{8.24}$$

であることを利用して展開すると次の表が得られる。ただし、表は

$$A_d = I + A_k\Delta + A_0, \quad B_d = B_k\Delta + B_0$$

としたときの A_0, B_0 をまとめたものであることに注意してほしい。

	A_0	B_0
前進差分	0	0
後退差分	$(A_k\Delta)^2 + \cdots$	$A_k B_k \Delta^2 + A_k^2 B_k \Delta^3 + \cdots$
0 次ホールド	$\frac{(A_k\Delta)^2}{2!} + \frac{(A_k\Delta)^3}{3!} + \cdots$	$A_k B_k \frac{\Delta^2}{2} + A_k^2 B_k \frac{\Delta^3}{6} + \cdots$
双一次	$\frac{(A_k\Delta)^2}{2} + \frac{(A_k\Delta)^3}{4} + \cdots$	$A_k B_k \frac{\Delta^2}{2} + A_k^2 B_k \frac{\Delta^3}{4} + \cdots$

この表から、サンプリング時間 Δ が十分に小さく Δ の項に比べて Δ^2 の項が無視できるとすれば、すべての方法が

$$\begin{aligned} A_d &= I + A_k\Delta \\ B_d &= \Delta B_k \end{aligned} \tag{8.25}$$

となることがわかる。

同様にして C_d, D_d についても表をまとめると

	C_d	D_d
前進差分	C_k	0
後退差分	$C_k + \Delta C_k A_k + \Delta^2 C_k A_k^2 + \cdots$	$\Delta C_k B_k + \Delta^2 C_k A_k B_k + \cdots$
0 次ホールド	C_k	0
双一次	$C_k + \frac{\Delta}{2} C_k A_k + \frac{\Delta^2}{4} C_k A_k^2 + \cdots$	$\frac{\Delta}{2} C_k B_k + \frac{\Delta^2}{4} C_k A_k B_k + \cdots$

が得られる。